§4 Der Gelfand-Homomorphismus

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass jede kommutative Banachalgebra A eine kanonische Darstellung in einem geeigneten Funktionenraum $C_0(X)$ hat. Ist A eine kommutat. C^*-Algebra, so ist diese Darst. ein isometr. Homomorphismus.

4.1 Definition Sei A eine kommutative BA. Dann def. wir

$$\hat{A} := \{\chi : A \to \mathbb{C} \mid \chi \text{ Algebrahomom.}, \chi \neq 0\}.$$

Dann heißt $\hat{A}$ der Gelfandraum (oder Strukturraum) von A.

4.2 Bsp: Sei $A = C_0(X)$, X lokalkompakt T_2. Dann ist für jedes $x \in X$ die Abb

$$\delta_x : C_0(X) \to \mathbb{C};\quad \delta_x(f) := f(x)$$

ein Element in $\hat{A}$. δ_x heißt Auswertungshomom. an der Stelle x. Später werden wir sehen, dass $\delta : X \to \hat{A};\ x \mapsto \delta_x$ bijektiv ist.

4.3 Bem: Ist A unital und $\chi \in \hat{A}$, so gilt immer $\chi(1_A) = 1$, denn $\chi(1_A) = \chi(1_A^2) = \chi(1_A)^2$, also $\chi(1_A) \in \{0,1\}$. Ist aber $\chi(1_A) = 0$, so folgt auch $\chi(a) = \chi(a)\chi(1_A) = 0\ \forall a \in A$, also $\chi = 0$. Nach Def von $\hat{A}$ gilt aber $\chi \neq 0$.

4.4 Lemma Sei A eine kommut. BA und sei A^1 die Unitalisierung von A. Dann ex. zu jedem $\chi \in \hat{A}$ genau ein $\tilde{\chi} \in \widehat{A^1}$ mit $\tilde{\chi}|_A = \chi$. Es gilt dann

$\tilde{\chi}(a+\lambda 1) = \chi(a)+\lambda$ und $\widehat{A^1} = \{\tilde{\chi} \mid \chi \in \hat{A}\} \cup \{\chi_\infty\}$ mit $\chi_\infty(a+\lambda 1)=\lambda$. (Wir schreiben hier $a+\lambda 1$ anstelle von $(a,\lambda)\in A^1$).

Bew: Ist $\tilde{\chi}: A^1 \to \mathbb{C}$ eine Fortsetzung von $\chi \in \hat{A}$, so folgt $\tilde{\chi}(a+\lambda 1) = \tilde{\chi}(a) + \lambda \underbrace{\tilde{\chi}(1)}_{=1} = \chi(a)+\lambda$.
Damit ist die Fortsetzung eindeutig und Nachrechnen zeigt, dass $\tilde{\chi}$ tatsächlich ein Algebrahomom. ist.
Ist nun $\varphi \in \widehat{A^1}$ beliebig mit $\varphi_{|A} \neq 0$, so folgt $\varphi = \tilde{\chi}$ für ein $\tilde{\chi} \in \hat{A}$. Ist $\varphi_{|A} = 0$, so folgt
$$\varphi(a+\lambda 1) = \underbrace{\varphi(a)}_{0} + \lambda \underbrace{\varphi(1)}_{=1} = \lambda = \chi_\infty(a+\lambda 1). \quad \blacksquare$$

Das obige Lemma erlaubt uns in vielen Fragen auf die Unitalisierung A^1 (bzw. $\hat{A}$) überzugehen, wenn wir eine Eins benötigen.

4.5 Lemma Sei A eine kommut. BA. Dann ist jedes $\chi \in \hat{A}$ stetig mit $\|\chi\|_{op} \leq 1$. Ist A unital mit $\|1_A\| = 1$, so gilt immer $\|\chi\|_{op} = 1$. (Beachte: χ ist insb. linear!)

Bew: Sei zunächst A unital. Dann gilt für alle $a \in A$: $\chi(a - \chi(a)1) = \chi(a) - \chi(a) = 0$, also ist $a - \chi(a)1 \notin G(A)$ und $\chi(a) \in \sigma(a)$.
Da $\sigma(a) \subseteq B_{\|a\|}(0)$ folgt $|\chi(a)| \leq \|a\|$ $\forall a \in A$, d.h. χ stetig mit $\|\chi\| \leq 1$. Ist $\|1\|=1$, so folgt wegen $\chi(1)=1$, dass $\|\chi\| = 1$.
Sei nun A nicht unital. Ist dann $\chi \in \hat{A}$, so ex. Fortsetzung $\tilde{\chi} \in \widehat{A^1}$ von χ. Dann folgt $\|\chi\|_{op} \leq \|\tilde{\chi}\|_{op} \leq 1$. $\blacksquare$

4.6 Bem: Ist A ein BA, so folgt aus Lemma 4.5, dass $\hat{A}$ eine Teilmenge der Einheitskugel in A' ist.
Wir versehen nun $\hat{A}$ mit der von der schwach-$*$-Topologie auf A' induzierten Topologie.
Insbesondere gilt: Ein Netz $(\chi_i)_i$ in $\hat{A}$ konvergiert gegen ein $\chi \in \hat{A}$ genau dann, wenn für alle $a \in A$: $\chi_i(a) \to \chi(a)$ gilt. (punktweise Konvergenz!).

4.7 Satz Sei A ein kommut. BA. Dann ist $\hat{A}$ versehen mit der oben def. Topologie ein lokalkompakter T_2-Raum. Ist A unital, so ist $\hat{A}$ kompakt.

Bew: Sei zunächst A unital. Nach 4.6 ist $\hat{A}$ Teilmenge von $B_1^{A'}(0)$ (= abg. Einheitskugel in A') und nach Banach-Alaoglu ist $B_1^{A'}(0)$ schwach-$*$ kompakt. Es genügt daher zu zeigen, dass $\hat{A}$ abg. in $B_1^{A'}(0)$ ist. Sei dazu $(\chi_i)_i$ ein Netz in $\hat{A}$ mit $\chi_i \xrightarrow{w^*} \chi$ für ein $\chi \in A'$.
Zeige: $\chi \in \hat{A}$.
Für alle $a, b \in A$ gilt $\chi(ab) = \lim_i \chi_i(ab) = \lim_i \chi_i(a)\chi_i(b)$
$= \chi(a)\chi(b)$, also ist χ ein Algebrahomom.
Wegen $\chi(1) = \lim_i \chi_i(1) = \lim_i 1 = 1$ ist $\chi \neq 0$, also $\chi \in \hat{A}$.
Besitzt A keine Eins, so betrachte
$$\widehat{A^1} = \{\tilde{\chi} \mid \chi \in \hat{A}\} \cup \{\chi_\infty\}.$$
Die Abb. $i: \hat{A} \to \widehat{A^1}$; $i(\chi) = \tilde{\chi}$ ist ein Homöom.

aufs Bild: Es ist klar, dass $\tilde{\chi} \to \tilde{\chi}|_A = \chi$ schwach-$*$-stetig ist. Gilt umgekehrt $\chi_i \to \chi$ in $\hat{A}$, so folgt für alle $a + \lambda 1 \in A^1$: $\tilde{\chi}_i(a+\lambda 1) = \chi_i(a) + \lambda \to \chi(a) + \lambda = \tilde{\chi}(a+\lambda 1)$, also $\tilde{\chi}_i \to \tilde{\chi}$ in $\widehat{A^1}$.

Damit ist $\hat{A} \cong \{\tilde{\chi} \mid \chi \in \hat{A}\}$ eine offene Teilm. des kompakten T_2-Raums $\widehat{A^1}$, und damit lokalkompakt.

4.8 <u>Bemerkung</u>: Der Beweis von 4.7 zeigt insbesondere auch, dass

$$\widehat{A^1} \cong \hat{A} \cup \{\chi_\infty\}$$

eine Einpunktkompaktifizierung (EPK) von $\hat{A}$ ist. (EPK's sind bis auf Homöomorphie eind.!)

4.9 <u>Definition</u> Sei A eine kommut. BA. Für jedes $a \in A$ def. wir die Funktion

$$\hat{a} : \hat{A} \to \mathbb{C}\,;\ \hat{a}(\chi) := \chi(a)$$

Dann heißt $\hat{a}$ die <u>Gelfand-Transformierte</u> von a.

<u>Beachte</u>: $\hat{a}$ ist immer stetig, denn gilt $\chi_i \to \chi$ in $\hat{A}$, so folgt $\hat{a}(\chi_i) = \chi_i(a) \to \chi(a) = \hat{a}(\chi)$ (da $\chi_i \xrightarrow{w^*} \chi$).

4.10 <u>Satz</u> Sei A eine kommut. BA. Dann gilt $\hat{a} \in C_0(\hat{A})$ für alle $a \in A$ und die Gelfand-Transformation

$$\wedge : A \to C_0(\hat{A})\,;\ a \mapsto \hat{a}$$

ist ein stetiger normfallender (d.h. $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|\ \forall a \in A$) Algebrahomomorphismus.

<u>Bew</u>: Ist A unital, so ist $\hat{A}$ kompakt, also gilt $C(\hat{A}) = C_0(\hat{A})$. Ist A ohne 1, so sei

$\phi: A^1 \to C(\widehat{A^1}) \cong C(\hat{A} \cup \{\chi_\infty\})$

die Gelfand-Transf. für A^1. Für $a \in A \subseteq A^1$ folgt dann für alle $\chi \in \hat{A}$

$\phi(a)(\tilde{\chi}) = \tilde{\chi}(a + 0\mathbb{1}) = \chi(a) = \hat{a}(\chi)$, und

$\phi(a)(\chi_\infty) = \chi_\infty(a + 0\mathbb{1}) = 0$

Damit ist $\hat{a} = \phi(a)|_{\hat{A}}$ und $\phi(a) \in C(\hat{A} \cup \{\chi_\infty\})$ mit $\phi(a)(\chi_\infty) = 0$, d.h. $\hat{a} \in C_0(\hat{A})$.

Da $\|\chi\|_{op} \leq 1$ für alle $\chi \in \hat{A}$ gilt für alle $\chi \in \hat{A}$

$|\hat{a}(\chi)| = |\chi(a)| \leq \|\chi\|_{op} \|a\| \leq \|a\|$,

also $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.

Wegen $\widehat{ab}(\chi) = \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) = \hat{a}(\chi)\hat{b}(\chi)$ ist $\wedge: A \to C_0(\hat{A})$ ein Algebrahomomorphismus. ∎

4.11 Bemerkung Im allg. braucht die Gelfand-Homom. weder injektiv, noch surjektiv zu sein. Ist z.B. $0 \neq A$ ein bel. Banachraum mit Mult. $ab = 0$ $\forall a, b \in A$ und sei A^1 die Unitalisierung von A. Dann gilt für jeden Homom. $\chi: A^1 \to \mathbb{C}$, dass

$\chi(a + \lambda\mathbb{1}) = \lambda = \chi_\infty(a + \lambda\mathbb{1})$, also $\widehat{A^1} = \{\chi_\infty\}$

(s.o. $\hat{A} = \emptyset$). Dann ist $\wedge: A^1 \to C(A^1) = \mathbb{C}$ sicher nicht injektiv. Wir werden später auch Bsp. sehen, wo $\wedge: A \to C_0(\hat{A})$ nicht surjektiv ist!

4.12 Lemma (Gelfand-Mazur) Sei A eine unitale BA, so dass $G(A) = A \setminus \{0\}$. Dann ist $A \cong \mathbb{C}$.

Beweis Nach 3.5 gilt für alle $a \in A$, dass $\sigma(a) \neq \emptyset$. Damit folgt: $\lambda \in \sigma(a) \overset{Def}{\Longleftrightarrow} a - \lambda\mathbb{1} \notin G(A) \overset{Vor.}{\Longleftrightarrow} a - \lambda\mathbb{1} = 0$, also $a = \lambda\mathbb{1}$. Damit folgt $A = \mathbb{C}\mathbb{1} \cong \mathbb{C}$ ∎

4.13 Satz Sei A eine kommutative unitale BA und sei $Max(A)$ der Raum der maximalen Ideale in A. Dann gelten:

(1) Die Abb. $\hat{A} \to Max(A)\,;\ \chi \mapsto \ker\chi$ ist eine wohldef. Bijektion

(2) Ist $a \in A$, so gilt $a \in G(A) \Leftrightarrow \hat{a} \in G(C(\hat{A}))$ (bzw. $a \in G(A) \Leftrightarrow \chi(a) = \hat{a}(\chi) \neq 0 \ \forall\ \chi \in \hat{A}$).

(3) Für alle $a \in A$ gilt $\sigma(a) = \{\hat{a}(\chi) \mid \chi \in \hat{A}\}\ (= \hat{a}(\hat{A}))$

Bew: (1) Zunächst gilt für alle $\chi \in \hat{A}$, dass $I_\chi := \ker\chi$ ein max. Ideal in A ist. Denn ist $J \subseteq A$ ein echtes Ideal in A mit $I_\chi \subseteq J$, so ist $J/_{I_\chi}$ ein echtes Ideal in $A/_{I_\chi}$ und $A/_{I_\chi} \cong \mathbb{C}$ via $a + I_\chi \mapsto \chi(a)$. Aber dann ist $\chi(J)$ echtes Ideal in $\mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ ein Körper ist folgt $\chi(J) = \{0\}$, also $J \subseteq I_\chi$.

Sind $\chi_1, \chi_2 \in \hat{A}$ mit $\ker\chi_1 = \ker\chi_2 =: I$, so folgt für alle $a \in A$:

$$\chi_2(a - \chi_2(a)1) = \chi_2(a) - \chi_2(a)\underbrace{\chi_2(1)}_{1} = 0, \text{ also auch}$$

$$0 = \chi_1(a - \chi_2(a)1) = \chi_1(a) - \chi_2(a), \text{ d.h. } \chi_1 = \chi_2.$$

Damit ist $\chi \mapsto \ker\chi$ injektiv.

Ist umgekehrt $I \subseteq A$ ein bel. max. Ideal, so gilt $G(A/_I) = (A/_I)\setminus\{0+I\}$, denn wäre $a \in A\setminus I$ mit $a+I$ nicht invertierbar in $A/_I$, so wäre $\tilde{J} = \{ab + I \mid b \in A\}$ ein echtes Ideal in $A/_I$, (da $1 + I \notin \tilde{J}$). Dann wäre auch $J = aA + I \subseteq A$ ein echtes Ideal in A mit $I \subseteq J$ und $I \neq J$ (da $a \in J\setminus I$). Da I max. folgt aber $I = J$. Wid!

Da $G(A/_I) = A/_I \setminus\{0+I\}$ folgt mit Gelfand-Mazur, dann $A/_I \cong \mathbb{C}$. Ist dann $\chi: A \to A/_I \cong \mathbb{C}$ die Quot. Abb., so ist $\chi \in \hat{A}$ mit $\ker \chi = I$.

(2) „$\Longrightarrow$" Ist $a \in G(A)$, so folgt $\chi(a) \in G(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, für alle $\chi \in \hat{A}$, also $\hat{a}(\chi) = \chi(a) \neq 0 \ \forall \chi \in \hat{A}$.

„$\Longleftarrow$" Sei nun $a \in A$ mit $\chi(a) \neq 0 \ \forall \chi \in \hat{A}$.

<u>Ann</u>: $a \notin G(A)$. Dann ist $J = aA = \{ab \mid b \in A\}$ ein echtes Ideal in A (da $1 \notin J$).

Nach Blatt 1, Aufg 3 ex. dann ein max. Ideal I in A mit $J \subseteq I$, und nach (1) ex. ein $\chi \in \hat{A}$ mit $I = \ker \chi$. Es folgt $\chi(a) \in \chi(I) = \{0\}$. Wid!

(3) Zunächst gilt: Ist $\chi \in \hat{A}$, so gilt $\chi(a - \chi(a)1) = 0$, also $a - \chi(a)1 \notin G(A)$ und damit $\chi(a) \in \sigma(a)$.

Sei umgekehrt $\lambda \in \sigma(a)$, also $a - \lambda 1 \notin G(A)$. Dann ist $(a - \lambda 1) \cdot A$ echtes Ideal in A und wie im Bew. von (2) folgt die Existenz von einem $\chi \in \hat{A}$ mit $0 = \chi(a - \lambda 1) = \chi(a) - \lambda$, also $\lambda = \chi(a) = \hat{a}(\chi)$. ■

4.14 Bemerkung: (1) Ist A eine kommutative BA ohne 1, so hatten wir das Spektrum $\sigma_A(a)$ von a def. durch $\sigma_A(a) := \sigma_{A_+}(a)$.

Nach Satz 4.13 und Lemma 4.2 gilt dann

$$\sigma_A(a) = \{\tilde{\chi}(a) \mid \chi \in \hat{A}\} \cup \{\chi_\infty(a)\}$$
$$= \{\chi(a) \mid \chi \in \hat{A}\} \cup \{0\} = \hat{a}(\hat{A}) \cup \{0\}.$$

(2) Der zweite Teil von Satz 4.13 liefert ein sehr nützliches Kriterium zur Überprüfung von Invertierbarkeit eines Elements in A (Vergl. Blatt 3).